Colegio Santa María de Maipú.

Departamento de Matemática.   Variable aleatoria

GUIA DE AUTOAPRENDIZAJE Nº5 MATEMÁTICA

IIIº MEDIO

Nombre_______________________________________ **Curso:**_______ **Fecha:** _______

Objetivo de Aprendizaje:

OA2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

Objetivo de la guía:

Definir y utilizar la esperanza y varianza de una variable aleatoria, asociada a un experimento para la toma de decisiones.

Instrucciones: Esta guía es un recurso de acompañamiento y ejercitación de la clase que veras en el video correspondiente, por lo que puedes imprimirla, una vez resuelta y revisada archivarla en una carpeta por asignatura. En caso de no poder imprimir, no hay ningún problema, ya que puedes ir copiando solo los ejemplos en tu cuaderno y dando respuesta a la ejercitación escribiendo el número de pregunta y su respuesta, especificando N° de guía, y fecha**. No olvides que frente a cualquier duda o consulta con respecto a tu clase y/o ejercitación debes contactarnos al correo :** matematica.iii.smm@gmail.com

El video correspondiente a esta clase se encuentra en el link: https://youtu.be/i0IDgcc4PP8

Valor esperado o Esperanza, Varianza y Desviación Estándar:

El valor esperado o Esperanza matemática, tiene origen en los juegos de azar y en las apuestas, ya que los jugadores deseaban saber cual era “la esperanza de ganar” al apostar repetidamente. Desde este punto de vista, la esperanza es la cantidad media de dinero que un jugador puede ganar o perder después de un numero grande de apuestas.

Ejemplo:

Se lanza una moneda al aire hasta que salga cara (c) o hasta realizar tres lanzamientos:

Si sale cara en el primer lanzamiento, se **pagan$200**

Si sale cara en el segundo lanzamiento, se **pagan $400**

Si sale cara en el tercer lanzamiento, se **pagan $500**

Si no sale cara en ningún lanzamiento el jugador **pierde $600**

¿Cuál es la cantidad de dinero que se **espera** ganar si se juega un número elevado de veces?

Se considera la variable aleatoria **X:** Monto a ganar

Por lo que **X puede tomar los valores:**

X= 200, Si sale $\{c\}$

X=400, si sale $\{s, c\}$

X=500, si sale $\{s, s, c\}$

X=-600, Si sale $\{s, s, s\}$

Además, las probabilidades para la variable **X son:**

$$\boldsymbol{P(X = 200) = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{P(X = 400) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{P(X = 500) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

$$\boldsymbol{P(X = -600) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

Luego, la cantidad de dinero que se **espera** ganar en el juego, se calcula como:

“**La suma de los productos entre los valores que puede tomar la variable aleatoria X y sus respectivas probabilidades”**

Entonces:

$$200 \cdot \frac{1}{2} + 400 \cdot \frac{1}{4} + 500 \cdot \frac{1}{8} - 600 \cdot \frac{1}{8} = 100 + 100 + 62{,}5 - 75 = 187{,}5$$

Por lo que el jugador espera ganar $187,5 después de jugar varias veces.

En general se puede expresar la Esperanza como:

$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X=x_i)}$$

El valor esperado o esperanza de una v.a., corresponde al **promedio** ponderado de sus valores. Su valor siempre se encuentra entre el valor mínimo y máximo de los números que puede tomar la variable aleatoria.

$$x_i: cantidad\ i-ésima\ que\ toma\ la\ v.a.$$
$$P(X=x_i): Probabilidad\ que\ toma\ la\ v.a. en\ esa\ cantidad$$

Ejercicio1: Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire, si sale una cara se ganan $500, si salen dos caras se ganan $1000 y si salen tres caras se pierden $2000

a) **Al jugar muchas veces ¿Cuánto es el dinero que se espera ganar?**
b) **¿es justo este juego?**

La Varianza y Desviación Estándar indica el grado de dispersión que tiene la variable con respecto a su valor promedio.

Se utiliza en la toma de decisiones cuando se comparan muestras que arrojan similar promedio.

La varianza y desviación estándar de una variable aleatoria se calcula con las expresiones:

Varianza:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

Desviación estándar:

$$s(X)=\sqrt{Var(X)}$$

Siendo $E(X^2)=\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x_i}^2 \cdot \boldsymbol{P(X=x_i)}$ **la rentabilidad.**

Ejemplo:

En la tabla 1 se muestran las rentabilidades de dos bancos A y B entre el año 2006 y 2011. Tendremos para el banco A la variable aleatoria **X** y para el banco B la variable aleatoria **Y** definida **X e Y como:** "rentabilidad anual".

Tabla 1	X	Y	$P(X = x_i)$	$P(Y = y_i)$
2006	0,2	0,08	0,2	0,2
2007	0,15	0,361	0,3	0,06
2008	0,3	0,091	0,3	0,2
2009	0,6	0,66	0,12	0,24
2010	0,45	0,2	0,06	0,28
2011	0,45	0,6	0,02	0,02

Queremos decidir dónde invertir entonces utilizaremos primero las Esperanzas de cada uno.

Las esperanzas calculadas para **A y B** son

$$E(X) = 0{,}283$$
$$E(Y) = 0.282$$

las ganancias esperadas para los bancos A y B son de 28,3% y 28,2%. Por lo anterior se muestran dos bancos muy parecidos en rentabilidad.

Utilizaremos **la varianza y la desviación estándar para tomar una decisión**. Para ello, hay que calcular la rentabilidad: $E(X^2) y\ E(Y^2)$

Año	X^2	Y^2	$P(X = x_i)$	$P(Y = y_i)$	$X^2 \cdot P(X = x_i)$	$Y^2 \cdot P(Y = y_i)$
2006	**0,04**	**0,0064**	**0,2**	**0,2**	**0,008**	**0,00128**
2007	**0,0225**	**0,130321**	**0,3**	**0,06**	**0,00675**	**0,00781**
2008	**0,09**	**0,008281**	**0,3**	**0,2**	**0,027**	**0,00165**
2009	**0,36**	**0,4356**	**0,12**	**0,24**	**0,0432**	**0,10454**
2010	**0,2025**	**0,04**	**0,06**	**0,28**	**0,01215**	**0,0112**
2011	**0,2025**	**0,36**	**0,02**	**0,02**	**0,00405**	**0,0072**
Suma			**1**	**1**	$E(X^2)$ **=0,10115**	$E(Y^2)$**0,13368**

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 0{,}10115 - 0{,}283^2 = 0.021061$$
$$s(X) = \sqrt{0.021061} = 0.145$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 0{,}13368 - 0{,}282^2 = 0.054156$$
$$s(Y) = \sqrt{0{,}54156} = 0{,}232$$

La rentabilidad del Banco A es menos dispersa que la del Banco B, por tanto conviene invertir en el Banco A dado que es menor su variabilidad.

Ejercicio2:

La función probabilidad de una v.a. **X** es:

$$F(X) = P(X = x_i) = \begin{cases} \mathbf{0.37} & \boldsymbol{Si\ X = 0} \\ \mathbf{0.37} & \boldsymbol{Si\ X = 1} \\ \mathbf{0.18} & \boldsymbol{Si\ X = 2} \\ \mathbf{0.06} & \boldsymbol{Si\ X = 3} \\ \mathbf{0.02} & \boldsymbol{Si\ X = 4} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{Si\ X = 5} \end{cases}$$

Calcula

a) El valor esperado de **X**

b) La varianza de **X**

c) La desviación estándar **X**

d) Grafica la función

Bibliografía:

Libro Matemática Tercero medio, Santillana Bicentenario

Variables Unidimensionales, Cecilia Larraín, USACH.